

ГРАНИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ БЛОКУ КОДІВ ХЕМІНГА ПРИ ЗАДАНИХ ВИМОГАХ ЩОДО ДОСТОВІРНОСТІ ПРИЙОМУ

Уривський Л. О., Корнієнко А. А.

Інститут телекомунікаційних систем КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна

E-mail: leonid_uic@ukr.net, f.c.otradniy@gmail.com

Hamming code block limit at the given requirements for reception reliability

The basic parameters of the Hamming codes are summarized. A four-dimensional view of the parameters of the Hamming codes and their relationship is considered to understand the length of the block to select the code based on the specified requirements for reliability of reception.

Найбільш відомий з перших коригуючих кодів – код Хемінга, який здатний виправляти одиничну помилку та знаходити подвійну не залежно від довжини блоку коду. Коди Хемінга є досконалими, тобто за своєю структурою співпадаючими з границею Хемінга [1].

Відповідно до корегуючих здатностей, коди Хемінга мають фіксовані параметри відстані Хемінга d , кількості виправлених помилок t та кількості виявлених помилок s : ($d = 3; t = 1; s = 2$) – незалежно від довжини блоку n .

Позитивна риса кодів Хемінга полягає в тому, що при рості числа символів у блоці n , зростає швидкість кодування R (табл.1; рис.1):

Таблиця 1: Швидкість кодів Хемінга.

Код Хемінга (n, k) $d_{min} = 3$	$R = k/n$
(7,4)	0,571
(15,11)	0,733
(31,26)	0,839
(63,57)	0,905
(127,120)	0,945
(255,247)	0,969
(511,502)	0,982
(1023,1013)	0,990

Отже, частка інформаційних символів k в суцільному блоці із n символів зростає.

Проте, при цьому потрібно враховувати, що при збільшенні числа символів у блоці може збільшитись кількість помилок, які попадуть у цей блок, а виправна здатність коду Хемінга стала ($t = 1$).

Отже, об'єктом дослідження є з'ясування динаміки обох процесів при зростанні довжини блоку n : зростання швидкості кодування R та зростання уразливості відповідного блоку – при сталій енергетиці каналу зв'язку.

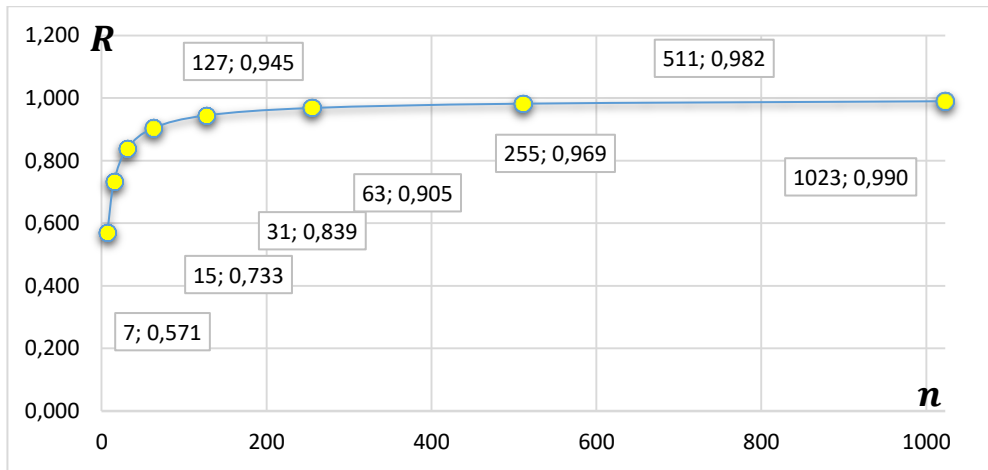


Рис. 1. Залежність швидкості коду від довжини блоку.

Нехай задані вимоги до достовірності прийому символів джерела на вході пристрою одержувача: $P_6 = 10^{-6}$. Розглянемо, якою має бути ймовірність помилки на символ на виході каналу зв'язку $p_{\text{ош}}$, в залежності від довжини блоку коду n , щоб досягнути потрібної достовірності після корегування за рахунок виправлення t помилок ($m = t = 1$) у блоці довжиною n . Для цього виведемо рівняння для вірогідності $p(m, n)$ виникнення t помилок у блоці довжиною n через біноміальний розподіл [1], та властивість нормування (1):

$$\sum_{m=0}^n p(m, n) = 1 \quad (1)$$

$$P_6 \leq \sum_{m=t+1}^n p(m, n) \quad (2)$$

Формула (2) визначає ймовірність P_6 помилкового прийому кодового слова на виході декодера, яку декодер виправити не може і яка являє собою суму ймовірностей виникнення $t + 1, t + 2, \dots, n$ помилок. Тоді, щоб знайти ймовірність правильного прийому, наприклад, для коду (7,4), переробимо біноміальний розподіл, який використовували вище, а саме границю ймовірності правильного прийому $P_{\text{пн}}$ [2]:

$$P_{\text{пн}} = \sum_{m=0}^{m < t+1} C_n^m p_{\text{ош}}^m (1 - p_{\text{ош}})^{n-m} = \quad (3)$$

$$= C_7^0 p_{\text{ош}}^0 (1 - p_{\text{ош}})^{7-0} + C_7^1 p_{\text{ош}}^1 (1 - p_{\text{ош}})^{7-1} = 1 - 10^{-6}$$

Вирішивши дане рівняння (3), отримуємо значення ймовірності помилки на символ на виході каналу $p_{\text{ош}} = 2,18 \cdot 10^{-4}$. Виконавши дану процедуру для інших кодів Хемінга занесемо дані у таблицю (табл. 2):

Таблиця 2: Ймовірність помилкового прийому.

Код Хемінга (n, k) $d_{min} = 3$	$p_{ош}$
(7,4)	$2,18 \cdot 10^{-4}$
(15,11)	$9,76 \cdot 10^{-5}$
(31,26)	$4,64 \cdot 10^{-5}$
(63,57)	$2,26 \cdot 10^{-5}$
(127,120)	$1,12 \cdot 10^{-5}$
(255,247)	$5,56 \cdot 10^{-6}$
(511,502)	$2,77 \cdot 10^{-6}$
(1023,1013)	$1,38 \cdot 10^{-6}$

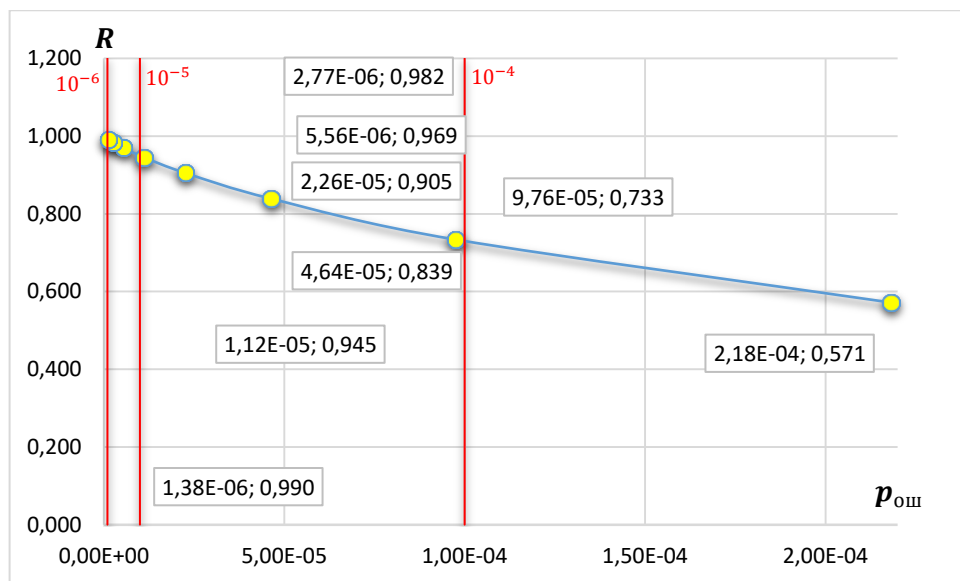


Рис. 2. Залежність ймовірності помилкового прийому від швидкості коду.

Результати дослідження (рис.2) показали, що:

– досконалий код Хемінга втрачає корисні корегуючі властивості з ростом довжини блоку n , тому що його виправна здатність не змінюється, а кількість виникаючих помилок при цьому зростає;

– в даному випадку доречно використовувати коди Хемінга до граничного значення довжини блоку коду 1023, опираючись на задані вимоги, оскільки подальше збільшення довжини блоку вже не має сенсу, тому що задана достовірність має місце й без кодування.

Література

1. Основи теорії телекомунікацій / Підручник / За заг. ред. проф. Ільченка М.Ю. – К.: 2010. – ICCЗІ НТУУ «КПІ» – с.786, іл.
2. Art of Doing Science and Engineering: Learning to Learn / Richard R. Hamming. - К.: 2003. – CRC Press – с.376.