УДК 681.513

ТОЧНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ ОЦЕНКИ СТАЦИОНАРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ДОСТУПНОСТИ СЕТЕВОЙ УСЛУГИ

Зайченко Ю.П., Васильев В.И., Вишталь Д.М., Любашенко Н.Д.
КПИ им. Игоря Сикорского, Украина
E-mail: d.vishtal@kpi.ua

Accurate and interval estimates of the stationary probability of network service availability

The problems of obtaining accurate estimates of the probability of network service availability for arbitrary pairs of nodes are considered. Estimations of minimax borders of probability of the node pair availability for networks of large dimension with a complex structural organization are constructed.

В последние десятилетия проблемы надежности сетевых структур принадлежат к приоритетным направлениям исследований в теории надежности. Формально сеть связи интерпретируется как связный граф без петель. Граф может быть как неориентированным, частично ориентированным, так и полностью ориентированным. Динамическая модель сети представлена стохастическим графом, элементы которого взвешены весовыми параметрами. Обычно весовые значения присваиваются ребрам, считая при этом узлы абсолютно надежными. При необходимости можно присвоить веса и узлам. Для сетей с восстановлением роль весовых параметров играют коэффициенты готовности элементов сети. Отказы элементов обусловлены техническими неполадками и внешними воздействиями. Для практики важно знать, что, несмотря на отказы элементов, любая пара абонентов сети может получить соединение (доступность сетевой услуги).

Под доступностью сетевой услуги понимается возможность предоставления связи для любого пользователя в любой момент времени. Можно дать несколько формальных определений свойства доступности сетевой услуги:

1. Сеть обладает свойством (s-t) доступности в момент времени *t*, если из узла s в узел t существует, по крайней мере, один простой путь;
2. Сеть обладает свойством полнодоступности в момент времени *t*, если для любой пары узлов сети существует, по крайней мере, один простой путь;
3. Сеть обладает свойством полнодоступности в момент времени *t*, если существует, по крайней мере, одно основное дерево сети;
4. Сеть обладает свойством полнодоступности в момент времени *t*, если в каждом из разрезающих множеств сети существует, по крайней мере, один доступный элемент.

Разумеется, определения [2-4] эквивалентны, но по-разному представляют структуру свойства связности сети. Вероятность доступности сетевой услуги позволяет объективно ответить на вопрос, какая из сравниваемых сетей лучше соответствует своему назначению. Мониторинг этой характеристики дает возможность своевременно вносить необходимые коррективы в эксплуатацию и развитие сети. Задача оценки доступности сетевой услуги относится к классу так называемых “трудновычислимых” задач комбинаторной логики свойств и классов. По этой причине получение точной оценки доступности сетевой услуги для очень больших сетей не всегда возможно и приходится ограничиваться оценками “снизу” и “сверху”. Для решения рассматриваемой задачи осуществляется перевод понятий доступности сетевой услуги на язык булевых алгебр [1]. Этой цели служат алгоритмы поиска путей, разрезающих множеств сети, алгоритмы декомпозиции структурной функции.

В работе рассмотрена задача оценки стационарной вероятности парной связности сети.

Бинарная стохастическая модель системы

1. Пусть С={1,2,…,*n*} - проиндексированное конечное множество элементов системы. Число $|C|$ называют порядком системы. Бинарность означает, что элементы и система в целом принимают значения в множестве B_2={0,1}.

Эволюция *i*-го элемента во времени моделируется соответствующим альтернирующим процессом восстановления $x_i(t)$, *i*=1,2,…,*n*.

$$x_i(t) = \begin{cases} 1, \text{ если в момент времени } t \;\; i-\text{й элемент работоспособен;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Нам потребуются некоторые результаты теории восстановления в удобной для нас интерпретации.

Вероятность застать *i*-й элемент в момент времени *t* в доступном состоянии называется нестационарным коэффициентом готовности и обозначается

$$P\{\, x_i(t) = 1\} = P_i(t),\; i = 1,2.\ldots, n.$$

С ростом *t* нестационарный коэффициент готовности стремится к постоянному значению – стационарному коэффициенту готовности *i*-го элемента. Его значение определяется как отношение средней длины интервала доступности *i*-го элемента к средней длине цикла *i*-го альтернирующего процесса:

$$\lim_{t\to\infty} P\{\, x_i(t) = 1\} = \frac{M[\theta_{x_i}]}{M[\theta_{x_i}] + M[\xi_{x_i}]} = P_i,\; i = 1,2.\ldots, n.$$

2. Пусть вектор состояния элементов $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ однозначно определяет состояние системы. Соответствующую функцию (двузначный предикат) называют структурной функцией системы:

$$\varphi(x_1(t), \ldots x_n(t)) = \begin{cases} 1, \text{ если в момент времени } t \text{ система работоспособна;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Формально, роль множества истинности (ложности) может выполнять любая функция алгебры логики, за исключением функций-констант.

Большинство систем обладают свойством монотонности, поэтому ограничимся случаем, когда структурная функция $\varphi(x_1(t), \ldots x_n(t))$ монотонна.

Постановка задачи

Задано:

- $G(Y, X)$ - структура сети;
  - $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$ – множество узлов сети;
  - $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество каналов сети;
- $s, t \in Y$ - две произвольные вершины сети;
- θ_{x_i} - случайные интервалы времени доступности *i*-го канала сети,
- ξ_{x_i} - случайные интервалы времени недоступности *i*-го канала сети.
- $p_i = \dfrac{M[\theta_{x_i}]}{M[\theta_{x_i}] + M[\xi_{x_i}]}$ - коэффициент стационарной готовности *i*-го канала сети.

  $\bar{p}_i = 1 - p_i = q_i$
- С целью упрощения будем считать все узлы абсолютно надежными.

Принятые предположения:

1. Зависимостью случайных величин $\left\{\theta_{x_i}\right\}$ и $\left\{\xi_{x_i}\right\}$, $i=\overline{1...n}$ можно пренебречь. $\exists M\left[\theta_{x_i}\right]<\infty$, $\exists M\left[\xi_{x_i}\right]<\infty$.

2. Вектор состояния элементов сети однозначно определяет (s-t) связность ((s-t) доступность) сети.

3. Сеть рассматривается как восстанавливаемая система с полнодоступным восстановлением.

4. При заданном режиме информационной нагрузки на сеть (малая, средняя, большая) устанавливается стационарный режим.

5. Состояние сети относительно $\varphi_{s,t}$-доступности (недоступности) определяется ресурсным состоянием ее элементов при заданной нагрузке на сеть.

Требуется найти:

$P\left\{\varphi_{s,t}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=1\right\}$ - стационарную вероятность (s-t) связности сети.

Для решения поставленной задачи были использованы следующие алгоритмы:

- алгоритм поиска всех кратчайших (s-t) путей сети;
- алгоритм поиска всех минимальных (s-t) сечений (разрезов) сети;
- алгоритм ортогонализации функции связности в ее наиболее компактном представлении (декомпозиция Шеннона).

В результате ортогонализации получаем вычислительную схему для оценки вероятности (s-t) связности, минимальную с точки зрения вычислительной трудоемкости. Присвоив в ортогонализованной МДНФ $\varphi_{s,t}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ переменным x_i значения p_i, а переменным с отрицаниями $\overline{x}_i$ значения q_i, получим представление вероятности (s-t) связности как функцию готовности элементов сети.

Выводы. Использованный подход, основанный на изоморфизме булевой алгебры свойств и булевой алгебры классов и порядковых соображений, может быть применен не только для оценки вероятности (s-t) доступности, но и для оценки вероятности полносвязности сетей связи большой размерности. Найденная вероятность парной и полной связности позволяют анализировать свойства доступности с изменением сетевой нагрузки.

Для сравнительного анализа надежности сетевых структур необходимо уметь вычислять вероятности их полносвязности. Та из структур, которая обладает большей вероятностью полносвязности, является более предпочтительной.

В случае сетей чрезмерно большой размерности, когда точная оценка невозможна, конструируются оценки «снизу» и «сверху [2].

В дальнейшем этот подход может использоваться:

- для решения задач синтеза сетей с заданными свойствами;
- для оценки точного или приближенного среднего стационарного времени пребывания сети в состоянии доступности сетевой услуги;
- для оценки важности элементов [3].

Литература

1. Р. Сикорский. Булевы алгебры. - М.: Мир - 1969.- 375 с.
2. К. Райншке, И. Ушаков “Оценка надежности систем с использованием графов”, М., “Радио и связь”, 1988г. – 208 стр.
3. Р. Барлоу, Ф. Прошан “Статистическая теория надежности и испытания на безотказность” М., “Наука”, 1984 г. – 327 стр.