УДК 621.396

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ В ТЕХНИКЕ СВЯЗИ

Жогов Р.Ю.
Институт телекоммуникационных систем НТУУ «КПИ»
Email: romanzhohov@gmail.com

Perspectives on using Discrete Hartley Transform in communication technologies

The Discrete Hartley Transform (DHT) is a real-valued transform closely related to the DFT of a real-valued sequence. This report contains a list of advantages of DHT and presents some properties of this transform which have practical meaning.

«Нет таких задач, для которых справедливо использование комплексного преобразования Фурье и одновременно не может быть применено вещественное преобразования Хартли» [1]. Преобразование Хартли является аналогом преобразования Фурье. Основной областью применения преобразования Хартли является спектральный анализ, фильтрация и обработка сигналов. Вещественное интегральное преобразование, сформулированное Хартли в 1942 г., позволяет обойтись без комплексного представления, а значит, характеризуется отсутствием избыточности. Преобразование Хартли обладает некоторым набором свойств, отличных от преобразования Фурье, которые будут рассмотрены ниже.

Определение преобразования. Преобразование Хартли задается парой формул (1.1):

$$\psi(\omega) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} V(t)cas(\omega t)dt$$
$$V(t) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)cas(\omega t)d\omega \qquad (1.1)$$

.

В этих соотношениях для функции cas будем использовать функцию, представленную суммой косинуса и синуса одного и того же аргумента (1.2):

$$cas(t) \equiv \cos(t) + \sin(t) \qquad (1.2).$$

Зачастую на практике необходимо использовать дискретные последовательности для описания временных рядов, поэтому введем дискретную переменную τ, которая будет соответствовать времени, но принимать только целочисленные значения от 0 до N-1. Таким образом, дискретное преобразование Хартли (ДПХ) вещественной функции $f(\tau)$ и соответствующее обратное преобразование определяются соотношениями (1.3):

$$H(v) = 1/N\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)cas(2\pi v\tau/N) \qquad (1.3)$$

$$f(\tau) = 1/N\sum_{v=0}^{N-1} H(v)cas(2\pi v\tau/N) \qquad .$$

ДПХ как и непрерывное имеет четную и нечетную составляющие (1.4):

$$H(v) = E(v) + O(v) \qquad (1.4).$$

Запишем соотношения для четной и нечетной компонент (1.5):

$$E(v) = [H(v) + H(N-v)]/2 \qquad (1.5)$$

$$O(v) = [H(v) - H(N-v)]/2 \qquad .$$

Из соотношения для преобразования Фурье, можно получить выражение для $F(v)$:

$$F(v) = E(v) - iO(v) \qquad (1.6).$$

Используя свойство связи ДПХ и ДПФ, можно сформировать выражения $H(v)$:

$$H(v) = \operatorname{Re}F(v) - \operatorname{Im}F(v) \qquad (1.7)$$

Следует отметить, что свойства ДПХ свидетельствуют в пользу использования этого преобразования в численном анализе и технике связи. Теория функций комплексной переменной существенно облегчила трактовку колебательных процессов и анализа сигналов, однако, использование комплексных экспонент является скорее удобной формой представления, нежели фундаментальным свойством. «Комплексные числа – изобретения человеческого разума, а не создание самой природы» [1]. При реализации алгоритмов ДПХ не требуется выделять участки памяти, и запоминать к какой области представления относятся составляющие, а значит, ДПХ более эффективно использует память и вычислительные ресурсы. Более того, ряд теорем для преобразования Фурье имеет различную форму для временной и частотной областей, этих «особенностей» лишено преобразование Хартли. Следует так же отметить, что скорости вычисления БПФ и БПХ совпадают, но поскольку в БПХ используется только вещественная область представления, вычисление БПХ выполняется в два раза быстрее [2]. Отдельного внимания заслуживает свойство симметричности прямого и обратного преобразования Хартли, что приводит к возможно использования одного программного кода и функционального узла ЦОС в «обе стороны». На рисунке 1 показан способ использования такого узла в приемнике и передатчике на технологии OFDM [3].

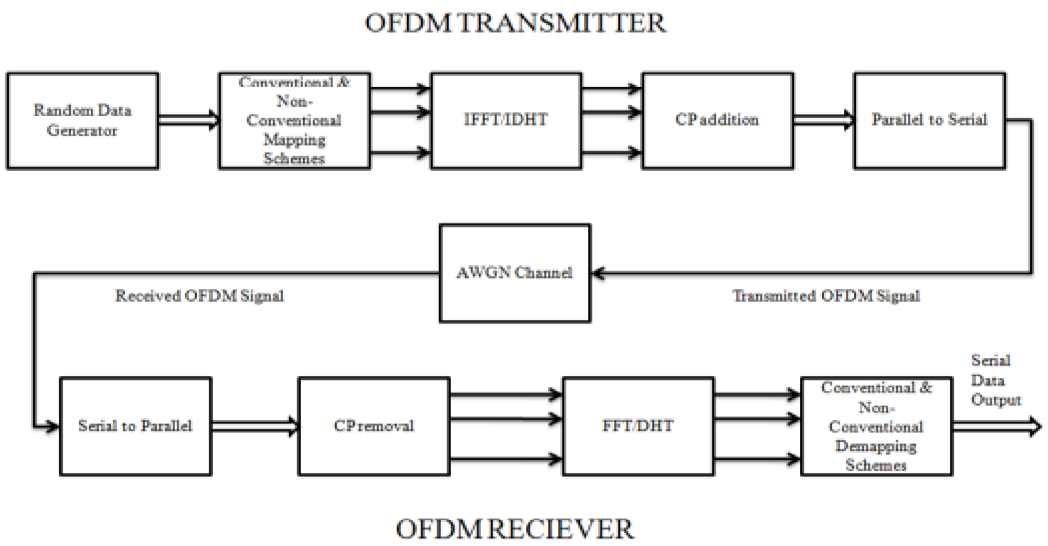

Рис. 1. Блочная диаграмма симуляции системы OFDM на основе ДПХ.

Ниже приведен пример реализации ДПХ на языке Python:

```
import math

user_input=raw_input("Enter data to transform:")
in_data=map(float, user_input.split())
N=len(in_data)
out_data=[0 for i in range(0,N)]

def DHT(in_data):
    for v in range (0, N):
        for t in range (0, N):
            out_data[v]+=in_data[t]*(math.sin(t*v/N)+math.cos(t*v/N))
    return out_data
```

Рис. 2. Реализация алгоритма ДПХ на языке Python.

Выводы. Учитывая свойства преобразования Хартли, целесообразно более широкое использование его в технике связи, в частности в цифровой фильтрации, передаче изображений, технологии OFDM и др. Для этого необходимо создать библиотеки и пакеты программ. Хотя БПХ не является абсолютной альтернативой БПФ, однако может быть использовано в тех случаях, когда необходимо сократить избыточность.

Литература

1. R. N. Bracewell. Discrete Hartley Transform. J.Opt.Soc.Am, 73(12):1832–1885, December 1983.
2. Hsieh S.Hou. The Fast Hartley Transform Algorithm. IEEE Transactions on Computers, C-36(2), February 1987.
3. Vinay Kumar Singh, Shilpi Gupta, Upena D. Dalal "Performance Comparison of Discrete Hartley Transform (DHT) and Fast Fourier Transform (FFT) OFDM System in AWGN Channel" International Journal of Computer Applications (0975 - 8887) Volume 70 - No. 9, May 2013