УДК 621.39

УМОВА СТАЦІОНАРНОСТІ ПРОТОКОЛУ q-МДКН ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ КОНФЛІКТІВ НА ФІЗИЧНОМУ РІВНІ

Єрохін В.Ф., Полякова А.С.
Інститут спеціального зв'язку та захисту інформації
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна
E-mail: polnastasya@gmail.com, stddssss@gmail.com

Stationary condition protocol q-CSMA for solving conflicts on the physical layer

It's considered one of the protocols of the synchronous multiple access with control and additional assumption of conflict resolution procedures in the physical layer. Received condition for the stationary operation of the protocol.

У системах зв'язку з множинним доступом широке застосування знайшов протокол доступу до каналу q-МДКН (МДКН - множинний доступ з контролем несівної) [1,2]. Проте питання умови стаціонарності цього протоколу, яке в повному обсязі не вирішене. Дослідженню цього питання присвячена дана робота.

Побудуємо математичну модель протоколу q-МДКН відповідно його класичного опису [3]. Вимоги найпростішого потоку з параметром λ надходять в систему з нескінченою кількістю обслуговуючих приладів. Якщо всі прилади вільні, то вимога або деяка кількість вимог починають обслуговуватись (успішно або неуспішно). Час обслуговування кожної вимоги розподілений експоненціально з параметром μ, процеси обслуговування незалежні. Якщо хоча б один обслуговуючий прилад зайнятий, то нові вимоги стають у чергу для очікування звільнення усіх приладів. В момент звільнення починається інтервал виявлення відсутності передачі, що має теж експоненціальний розподіл з параметром χ. По закінченню цього інтервалу, якщо із вхідного потоку не поступила вимога, то із $i \in \{0.1,2\ldots\}$ джерел повторних викликів (ДПВ) з розподіленою по Бернуллі ймовірністю $q(v/i)$ вибираються $v \in (0.1,2\ldots)$ вимог для обслуговування:

$$q(v/i)=C_i^v\, q^v\, (1-q)^{(i-v)};\quad q \in [0,1)$$

Припустимо також, шо вимоги з ДПВ можуть безповоротно втрачатись з ймовірністю $(1-h)$. $h \in [0.1]$. Якщо $v = \overline{1,n}$ (де $n \in (1.2.3\ldots)$ кратність конфліктів, що можуть бути успішно розв'язані на фізичному рівні), то по закінченню обслуговування кожна з v успішно обслужених вимог залишає систему обслуговування. Якщо ж $v > n$, то всі v неуспішно обслужених вимог стають в ДПВ. збільшуючи їх кількість на v. Якщо $v = 0$, то мас місце черговий інтервал виявлення відсутності передачі.

Використовуючи відомий асимптотичний підхід з теорії масового обслуговування [4] та його поширення на випадки, коли можливе розв'язання конфліктів на фізичному рівні [5] у додатковому припущенні про ненульові безповоротні втрати вимог із ДПВ одержимо систему рівнянь у вигляді (тут $n = 2$):

$$\begin{cases} Q'(i,t) = -(l\lambda + \chi)Q(i,t) + \mu hG(i-1,t) + \mu H(i,t) + \mu(1-h)G(i,t) + Q(i,t)\chi q(0/i); \\ H'(i,t) = l\lambda Q(i,t) + \chi q(1/i+1)Q(i+1,t) + l\lambda H(i-1,t) - (l\lambda + \mu)H(i,t) + 2\mu K(i,t); \\ K'(i,t) = \chi q(2/i+2)Q(i+2,t) + l\lambda K(i-1,t) - (l\lambda + 2\mu)K(i,t); \\ G'(i,t) = l\lambda G(i-1,t) - (l\lambda + \mu)G(i,t) + 2\mu hM(i-1,t) + 2(1-h)\mu M(i,t); \\ M'(i,t) = l\lambda M(i-1,t) - (l\lambda + 2\mu)M(i,t) + 3\mu hP\_3(i-1,t) + 3(1-h)\mu P\_3(i,t); \\ \vdots \\ P_v'(i,t) = \chi q(v/i+v)Q(i+v,t) + l\lambda P_v(i-1,t) + h(v+1)\mu P_{(v+1)}(i-1,t) + \\ + (1-h)(v+1)\mu P_{(v+1)}(i,t) - (l\lambda + v\mu)P_v(i,t); \end{cases}$$

$i = 0,1,2,\dots;\quad v = 3,4,5,\dots$.

Для стаціонарного режиму і довільної наперед заданої кратності $\mathrm{i} = 2,3.4\dots n$ конфліктів, що розв'язуються на фізичному рівні, здійснюючи аналогічно [3] асимптотичний перехід $q \to 0; i \to \infty$ так, що $x \cong qi < \infty$, одержуємо рівняння для щільності $\pi(\mathrm{x})$ у вигляді:

$$l\rho\pi(x) - (l\rho + \alpha x)Q(x) + h[F(x) - H(x) - 2K(x) - \sum_{v=3}^{n} vP_v^{+}(x)] = C, \tag{1}$$

де:

$h \in [0,1]$ - ймовірність невтрати вимоги з ДПВ;

$l \in [0,1]$ - ймовірність невтрати вимоги із вхідного потоку, якщо вона прийшла на етапі обслуговування;

$\alpha \triangleq \frac{\chi}{\mu};\ \rho \triangleq \lambda/\mu$;

C - довільна дійсна константа;

$$\pi(x) \underline{\Delta} Q(x) + H(x) + G(x) + K(x) + M(x) + \sum_{v=3}^{\infty} P_v(x);$$

$$F(x) \underline{\Delta} H(x) + G(x) + 2[K(x) + M(x)] + \sum_{v=3}^{\infty} vP_v(x);$$

$Q(x) = \pi(x)\dfrac{1}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$ - імовірність відсутності вимог на обслуговування;

$H(x) = \pi(x)\dfrac{\rho + \alpha[q_1(x) + q_2(x)]}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$ - імовірність однієї успішно обслуговуваної вимоги;

$$\mathrm{G(x)} = \pi(x)\frac{\alpha\sum\limits_{v=3}^{\infty} q_v(x)}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$$ - імовірність однієї неуспішно обслуговуваної вимоги;

$$\mathrm{K(x)} = \pi(x)\frac{\frac{\alpha}{2} q_2(x)}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$$ – імовірність двох успішно обслуговуваної вимоги;

$$\mathrm{M(x)} = \pi(x)\frac{\frac{\alpha}{2}\sum\limits_{v=3}^{\infty} q_v(x)}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$$ – імовірність двох неуспішно обслуговуваної вимоги;

$$\mathrm{P_v^+(x)} = \pi(x)\frac{\frac{\alpha}{v}\sum\limits_{i=v}^{n} q_i(x)}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$$ - імовірність $v \le n$ успішно обслуговуваної вимоги;

$$\mathrm{P_v^-(x)} = \pi(x)\frac{\frac{\alpha}{v}\sum\limits_{i=v+1}^{\infty} q_i(x)}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$$ - імовірність $v \le n$ неуспішно обслуговуваної вимоги;

$$\mathrm{P_v(x)} = \pi(x)\frac{\frac{\alpha}{v}\sum\limits_{i=v}^{\infty} q_i(x)}{1+\rho+\alpha\varphi(x)}$$ - імовірність $v > n$ неуспішно обслуговуваної вимоги.

В свою чергу, $\varphi(x)\underline{\Delta}\int\limits_0^x \frac{1-e^{-l}}{l}dl;\;\; q_v(x)\underline{\Delta}\frac{x^v}{v!}e^{-x}$.

Після підстановок одержуємо рівняння (1) у явному вигляді:

$$\pi(x) = \frac{1+\rho+\alpha\varphi(x)}{l\rho^2 + l\alpha\rho\varphi(x) - x\alpha(1-h) - \alpha h\sum\limits_{v=1}^{n}\frac{x^v}{(v-1)!}e^{-x}} \qquad (2)$$

Теорема. Для існування стаціонарного режиму протоколу q-МДКН необхідно і достатньо наявності втрат повторних вимог.

Доведення:

1. Необхідність. Якщо $h < 1$, то існує таке C, що

$$\int_{0}^{\infty} \pi(\mathrm{x}) = 1 \tag{3}$$

Доведемо, що при $h < 1$. $\lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \pi(x) = 0$

Відомо [6], що для $x >> 1$ $\int_{0}^{x} \frac{1 - x^{-l}}{l} dl \cong \ln x$, $\lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$,

Тоді $\lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \pi(x) = \lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \frac{C\alpha \ln x}{l\alpha\rho \ln x - \alpha(1-h)x} = 0$.

Таким чином, (3) доведено.

2. Достатність. Якщо $\int_{0}^{\infty} \pi(\mathrm{x}) = 1$, то $h < 1$.

Для того, щоб виконувалась нерівність $h < 1$, треба щоб при відсутності обмежень на нормуючу константу C в (2) у відповідності з правилом Лопіталя

$$\lim_{\mathrm{x} \to +\infty} \pi(x) = \lim_{\mathrm{x} \to +\infty} (\pi(x))'_{x} = 0 \tag{4}$$

Покажемо, що для цього треба. У відповідності з теоремою Барроу [6] щодо $\varphi(\boldsymbol{x})$

$$\lim_{\mathrm{x} \to +\infty} (\pi(x))'_{x} = \frac{C}{l\rho + x(h-1) + he^{-x} \sum_{v=1}^{n} \frac{(x-v)x^{v}}{(v-1)!}} = \frac{C}{l\rho + x(h-1)} = 0$$

Очевидно, що (4) виконується лише при $h < 1$.

Теорему доведено.

Таким чином, умовою стаціонарності протоколу q-МДКН є наявність втрат повторних вимог.

Література

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями : [пер. с англ. Б. С. Цыбаков] / Л. Клейнрок. – М. : Мир, 1979. – 600 с.
2. Сотовые радиосети с коммутацией пакетов / М. Е. Ильченко,С. Г. Бунин, А. П. Войтер. – К. : Наукова думка, 2003. – 266 с.
3. Бертсекас Д. Сети передачи данных / Д. Бертсекас, Р. Галлагер; пер. с англ.— М.: Мир, 1989. — 544 с.
4. Назаров А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем / А. А. Назаров. – Томск : ТГУ, 1991. – 158 с.
5. Єрохін В.Ф. Випадковий множинний доступ при розв’язанні конфліктів на фізичному рівні: Навч. посібник / В. Ф. Єрохін. — К. : ІСЗЗІ НТУУ “КПІ”, 2014. — 294 с.
6. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 720 с.