УДК 621.396

ШВИДКА ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІПШИЦА У БЕЗПРОВОДОВИХ СЕНСОРНИХ МЕРЕЖАХ

Трач Б.В., Лисенко О.І.
Інститут телекомунікаційних систем НТУУ «КПІ», Україна
E-mail: bv.trach@gmail.com

Fast Lipschitz Optimization in Wireless Sensor Networks

Fast Lipschitz Optimization method is considered. It allows efficiently solving optimization tasks in distributed systems, for example in wireless sensor networks. Its performance indicators have better convergence properties than typical Lagrangian methods. Such algorithms are potentially applicable for distributed target detection and radio transmitter power control.

На даний момент безпроводові сенсорні мережі є важливим інструментом дослідження фізичного світу. Їх важливість пов'язана з новими можливостями використання, що обумовлені такими характеристиками БСМ, як відсутність необхідності у кабельній інфраструктурі, мініатюрність вузлів, низьке споживання електроенергії, вбудований радіоінтерфейс, досить висока обчислювальна здатність, порівняно невелика вартість. Все це зробило можливим їх широке застосування у багатьох сферах людської діяльності з метою автоматизації процесів збору інформації, моніторингу, контролю характеристик різноманітних технічних та природніх об'єктів [1]. При цьому у зв’язку з обмеженими ресурсами окремих вузлів для вирішення багатьох задач необхідна кооперативна робота всіх вузлів мережі для досягнення цілі.

При цьому багато задач, що виконуються безпроводовими сенсорними мережами, зводяться до розподіленого вирішення задач оптимізації, у яких кожен вузол підстроює свої параметри з урахуванням інформації на сусідніх вузлах. Для виконання такої задачі розроблена велика кількість методів [2], однак вони не були спеціально розроблені для використання в безпроводових сенсорних мережах. Як наслідок цього при їх застосуванні виконується надлишковий обмін даними, якого можна було б уникнути при застосуванні більш досконалих алгоритмів. Одним з таких алгоритмів є алгоритм швидкої оптимізації Ліпшица [3], що полягає у використанні властивостей стискаючих відображень Ліпшица, і дозволяє одержати сходження до оптимального результату швидше, ніж при використанні методів Лагранжа.

Мета дослідження — дослідження алгоритмів розподіленої мережевої оптимізації. Об'єктом дослідження є алгоритм швидкої оптимізації Ліпшица. Предметом дослідження є розподілена локалізація вузлів у безпроводових сенсорних мережах.

Розглянемо задачу оптимізації у її загальній форм. Нехай необхідно знайти максимум функції:

$$\max_{x} f_0(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

за певних обмежень-нерівностей та обмежень-нерівностей:

$$x_i \le f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, \ldots, l \tag{2.1}$$

$$x_i = h_i(\boldsymbol{x}), i = l+1, \ldots, n \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{x} \in D, \tag{2.3}$$

де D — не порожня, випукла, компактна множина, $l \le n$, а цільова функція та обмеження неперервні диференційовані функції, такі що

$$f_0(\boldsymbol{x}) : D \to R^m, \quad m \ge 1 \tag{3.1}$$

$$f_i(\boldsymbol{x}) : D \to R, i = 1, \ldots, l \tag{3.2}$$

$$h_i(\boldsymbol{x}) : D \to R, i = l+1, \ldots, n \tag{3.3}$$

Розглянемо умови, за яких до задачі можна застосувати метод швидкої оптимізації Ліпшица. Нехай

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_l(\boldsymbol{x})]^T \tag{4.1}$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{x}) = [h_{l+1}(\boldsymbol{x}), f_{l+2}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})]^T \tag{4.2}$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = [F_i(\boldsymbol{x})] = [\mathbf{f}(\boldsymbol{x})^T, \mathbf{h}(\boldsymbol{x})^T]^T \tag{4.3}$$

Тоді необхідно перевірити виконання наступних умов:

$$\nabla f_0(x) \succ 0, \ f_0(x) \text{ строго зростаюча.} \tag{5.1а}$$

$$\|\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{x})\| < 1 \tag{5.1б}$$

і або:

$$\nabla_j F_i(\boldsymbol{x}) \ge 0, \forall i, j \tag{5.2}$$

або:

$$\nabla_i f_0(\boldsymbol{x}) = \nabla_j f_0(\boldsymbol{x}), \tag{5.3а}$$

$$\nabla_j F_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \forall i, j \tag{5.3б}$$

$$\|\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{x})\|_\infty < 1, \tag{5.3в}$$

або:

$$f_0(\boldsymbol{x}) \in R, \tag{5.4а}$$

$$\|\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{x})\| \le \frac{\beta}{\beta + \Delta}, \tag{5.4б}$$

де $\beta = \min\limits_{i, x \in D} \nabla_i f_0(\boldsymbol{x}),$

$\Delta = \max\limits_{i, x \in D} \nabla_i f_0(\boldsymbol{x}).$

За таких умов задача оптимізації допускає вирішення швидким методом Ліпшица. Крім того, формули (5.1-5.4) можливо подати і у іншому вигляді [4]. Вибір умов для перевірок слід вибирати залежно від вигляду обмежень-рівностей та обмежень-нерівностей.

Знаходження оптимального значення використовується наступна властивість сходимості: нехай $\boldsymbol{x}(0) \in D$ початкова оцінка оптимального рішення, а $\boldsymbol{x}^i(k) = [x_1(\tau_1^i(k)), x_2(\tau_2^i(k)), \ldots, x_n(\tau_n^i(k))]$ — вектор змінних на вузлі i в момент часу $k \in N$, де $\tau_i^j(k)$ — затримка з якою змінна вузла j досягає вузла i. У цьому випадку наступний алгоритм сходиться до оптимального рішення:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= [f_i(\boldsymbol{x}^i(k))]^D, i = 1, \ldots, l \\ x_i(k+1) &= [h_i(\boldsymbol{x}^i(k))]^D, i = l+1, \ldots, n \end{aligned} \tag{6}$$

де $k \in N_+$ — цілочисельний номер ітерації.

Згідно з цією властивістю кожен вузол мережі оновлює свої змінні за ітеративним алгоритмом (6) та з використанням тих змінних інших вузлів, що наявні у нього на час ітерації. Слід зазначити, що якщо $f_i(\boldsymbol{x})$ залежить лише від змінних сусідніх вузлів, обмін цими даними може виконуватись з високою ефективністю. У деяких задачах, наприклад оптимізації енергоспоживання, можна використовувати цей алгоритм без обміну інформації [5].

На практиці буває корисно знати максимальну кількість ітерації алгоритму, яку необхідно виконати для сходження алгоритму до заданої точності η. Нехай

$$d = \max_{x,y \in D} \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|_\infty \tag{7}$$

Тоді при $\eta < d$ для знаходження розв'язку з заданою точністю необхідна кількість ітерації, що пропорційна $\bar{k}$,

$$\bar{k} = \frac{|\ln \eta| - |\ln d|}{|\ln \alpha|} \tag{8}$$

де α константа Ліпшица для $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$ при $x \in D$:

$$\alpha = \max_x \| \nabla F_i(\boldsymbol{x}) \| < 1, \forall i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Таким чином у роботі описано алгоритм швидкої оптимізації Ліпшица, надано умови його застосування до задач оптимізації, та нерівність для визначення необхідної кількості ітерацій. Ці методи можуть застосовуватись для вирішення задач, що виникають у безпроводових сенсорних мережах у широкому ряді практичних задач.

Література

1. Ian F. Akyildiz, Weilian Su, Yogesh Sankaraubramaniam, and Erdal Cayirci: A Survey on sensor networks, IEEE Communications Magazine (2002).
2. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis: Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods (2015), 735 pages.
3. Carlo Fischione, Fast-Lipschitz optimization with wireless sensor networks applications, 10th International Conference on Information Processing in Sensor Networks (IPSN) (2011), pages: 378 – 389.
4. Martin Jakobsson, Carlo Fischione, Pradeep Chathuranga Weeraddana: Extensions of Fast-Lipschitz Optimization, (2014) Онлайн-ресурс http://arxiv.org/abs/1309.0462 (останній доступ 29.02.2016).
5. M. Schubert and H. Boche, QoS-Based Resource Allocation and Transceiver Optimzation, Foundations and Trends in Communications and Information Theory. Boston, MA: NOW, 2005.