

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЇ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ГРИ ЗБЛИЖЕННЯ З ДРОБОВИМИ ІНТЕГРАЛАМИ РІМАНА-ЛІУВІЛЛЯ

Гетьман О.В., Руренко О.Г., Фуртат О.В.

Навчально-науковий інститут телекомунікаційних систем

НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»,

Таврійський національний університет імені В.І.Вернадського, Україна

E-mail: lgetman78@gmail.com, a.rurenko@gmail.com, furtatlina@gmail.com

REPRESENTATION OF THE EVOLUTION FOR THE MODEL INTEGRAL GAME OF APPROACH WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRALS

In this paper, we obtain a representation of the evolution for a model integral game with fractional Riemann-Liouville integrals. The representation of the evolution of the game is expressed in terms of the generalized Mittag-Leffler matrix function.

В роботі отримано представлення еволюції для модельної інтегральної гри зближення з дробовими інтегралами Рімана-Ліувілля. Представлення еволюції гри виражається в термінах узагальненої матричної функції Міттаг-Леффлера.

Застосування методів дробового числення в теорії керування викликає значний інтерес у дослідників, оскільки на відміну від класичних диференціальних моделей таких процесів дозволяє апроксимувати динамічні процеси з пам'яттю і вивчати їх спадкові особливості [1, 2].

В роботі розглянута модельна ігрова задача зближення для системи інтегральних рівнянь з дробовими інтегралами Рімана-Ліувілля. Подібні ігрові задачі були визначені в [3], де показаний зв'язок таких ігор з більш широкими класами ігрових задач зближення для динамічних систем з вольтерівською еволюцією.

Для функції $f(x)$, визначеної на $(0, \infty)$, дробовий інтеграл Рімана-Ліувілля порядку β представляється як

$$J_t^\beta(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \beta > 0, \quad (1)$$

при чому $J_t^\beta f(t) = f(t)$ для $\beta = 0$, де $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функція Ейлера. Рівняння (1) може бути представлено у вигляді згортки функцій

$$J_t^\beta f(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} * f(t). \quad (2)$$

Нехай в n -мірному евклідовому просторі R^n заданий керований процес, динаміка якого описується системою інтегральних рівнянь

$$z(t) = z_0 + \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} z(\tau) d\tau + \frac{B}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \phi(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (3)$$

тут $z(t)$ - вимірна (по Лебегу) і обмежена вектор-функція, A, B - $n \times n$ квадратні матриці, $\phi(u, v), \phi: U \times V \rightarrow R^n$ - функція, яка вважається неперервною за сукупністю змінних u, v , таких, що $u \in U, v \in V$, де U, V - деякі компактні множини в R^n .

Окрім еволюції процесу (3), задана деяка термінальна множина M^* , яка представлена у вигляді

$$M^* = M_0 + M, \quad (4)$$

де M_0 - лінійний підпростір в R^n , а M - компактна множина, така, що $M \in K(L)$, де L - ортогональне доповнення до M_0 в R^n .

Наміри першого (u) і другого (v) гравців протилежні. Перший гравець намагається вибирати керування в своєму класі керувань таким чином, щоб якнайшвидше привести траєкторію процесу (3) на термінальну множину (4), а другий — максимально відкласти момент зближення з термінальною множиною M^* .

Метою роботи є встановлення достатніх умов закінчення гри на умовах першого гравця за деякий гарантований час зближення $t < \infty$ і знаходження керувань для першого гравця в класі контркерувань.

Далі без доведення приведемо деякі властивості дробових інтегралів, які відомі в теорії дробового числення і будуть нами використані в роботі.

Властивість 1 ([2], властивість 2.5):

$$J_t^\alpha (t^{\beta-1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} t^{\beta+\alpha-1} \quad (5)$$

Властивість 2 ([2], лема 2.3):

$$J_t^\alpha J_t^\beta (f(t)) = J_t^{\alpha+\beta} (f(t)) \quad (6)$$

В роботі [3] була визначена матрична функція Міттаг-Леффлера. Представимо матричну функцію Міттаг-Леффлера у вигляді наступного матричного ряду

$$E_{\alpha, \beta}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (7)$$

Для отримання представлення еволюції гри розглянемо еквівалентну до (3) систему інтегральних рівнянь

$$z(t) = z_0 + A J_t^\alpha z(t) + B J_t^\beta \phi(t), \alpha > 0, \beta > 0 \quad (8)$$

в якій через $F(t)$ позначимо праву частину: $F(t) = z_0 + BJ_t^\beta \phi(t)$. Для пошуку розв'язку системи інтегральних рівнянь (8) використаємо метод послідовних наближень (метод Пікара). Це означає, що розв'язок $z(t)$ системи (8) будемо шукати у вигляді нескінченного функціонального ряду:

$$z(t) = z_0(t) + z_1(t) + z_2(t) \dots \quad (9)$$

Початкове наближення $z_0(t)$ нехай дорівнює $F(t)$. Тоді

$z_0(t) = F(t) = z_0 + BJ_t^\beta \phi(t)$, а наступні наближення обчислюються за формулою:

$$z_k(t) = AJ_t^\alpha z_{k-1}(t), k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Для $z_1(t)$ отримаємо наступний вираз:

$$z_1(t) = AJ_t^\alpha z_0(t) = AJ_t^\alpha (z_0 + BJ_t^\beta \phi(t)) = AJ_t^\alpha z_0 + A \times BJ_t^{\alpha+\beta} \phi(t). \quad (11)$$

Розв'язок $z_1(t)$ можна переписати в більш компактному вигляді

$$z_1(t) = A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} z_0 + A \times BJ_t^{\alpha+\beta} \phi(t), \quad (12)$$

оскільки перший інтеграл в (11) обчислюється: $AJ_t^\alpha z_0 = A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} z_0$, а подвійні дробові інтеграли: $A \times BAJ_t^\alpha AJ_t^\beta \phi(t) = A \times BJ_t^{\alpha+\beta} \phi(t)$ спрощуються на підставі напівгрупової властивості дробових інтегралів (6) (*Властивість 2*).

Далі знайдемо наближення $z_2(t)$. Оскільки

$$z_2(t) = AJ_t^\alpha z_1(t) = AJ_t^\alpha \left(A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} z_0 + A \times BJ_t^{\alpha+\beta} \phi(t) \right),$$

тоді після аналогічних спрощень отримаємо:

$$z_2(t) = A^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} z_0 + A^2 \times BJ_t^{2\alpha+\beta} \phi(t).$$

Можна показати, що для $k \geq 1$ справедлива рекурентна формула

$$z_k(t) = A^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} z_0 + A^k \times BJ_t^{k\alpha+\beta} \phi(t), \quad (13)$$

а відтак, розв'язок (9) можна представити у вигляді функціонального ряду

$$\begin{aligned} z(t) = z_0 + BJ_t^\beta \phi(t) + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} z_0 + ABJ_t^{\alpha+\beta} \phi(t) + A^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} z_0 + \\ + A^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} z_0 + A^k BJ_t^{k\alpha+\beta} \phi(t) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Отриманий розв'язок $z(t)$ у вигляді ряду (14) при $k \rightarrow \infty$ можна переписати таким чином:

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} z_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha+\beta-1}}{\Gamma(k\alpha+\beta)} B * \phi(t). \quad (15)$$

В термінах матричної функції Міттаг-Леффлера (7) $z(t)$ виражається наступною формулою

$$z(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha)z_0 + E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)t^{\beta-1}B * \phi(t), \quad (16)$$

а відтак представлення еволюції для інтегральної гри (3), (4) має вигляд:

$$z(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha)z_0 + \int_0^t E_{\alpha,\beta}(A(t-\tau)^\alpha)(t-\tau)^{\beta-1}B\phi(u(\tau),v(\tau))d\tau, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (17)$$

Можна показати, що отриманий розв'язок $z(t)$ у вигляді системи рівнянь (17) описує еволюцію гри для іншого класу ігрових задач, коли динаміка процесів описується дробовими похідними Капуто [2]. Такі ігрові задачі вивчалися в [5]. Таким чином встановлено зв'язок між класами ігрових задач для окремих модельних еволюційних динамічних ігор зближення.

Література

1. Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D, Fejiu V. Fractional Order Systems and Control - Fundamentals and Applications.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractal Differential Equations. — Elsevier: Amsterdam, the Netherlands, 2006.
3. Eidelman S.D., Chikrii A.A., Rurenko A.G. Quasilinear integral games of approach // Доповіді НАН України. -1998. -7. -С.92-98.
4. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. — Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academ. Pub., 1997. — 424 P.
5. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных управлений дробового порядка // Кибернетика и системный анализ. -2000. -3. -С.3-31.