

## **ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ АКТУАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОЦІНКИ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ СИГНАЛІВ З ДИСКРЕТНОЮ МОДУЛЯЦІЄЮ**

**Уривський Л.О., Шмігель Б.О., Косогор А.В.**

*Навчально-науковий інститут телекомунікаційних систем*

*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна*

*E-mail: leonid\_uic@ukr.net, bshmigel@gmail.com, kosogoranastasia@gmail.com*

### **COMPARATIVE ANALYSIS OF CURRENT MATHEMATICAL MODELS FOR ASSESSING THE NOISE IMMUNITY OF SIGNALS WITH DISCRETE MODULATION**

This paper presents a comparative analysis of current mathematical models used to assess the noise immunity of signals with discrete modulation.

За останні десятиліття цифрові комунікації вступили в фазу бурхливого розвитку, яка активно продовжується і в теперішній час. Використання сигнально-кодових конструкцій (СКК) дозволяє найбільш ефективно використовувати ресурси каналу, адже одночасно можливо отримати вииграш як з енергетичної, так частотної ефективності або, у всякому разі, отримати вииграш по одному показнику, не погіршуючи інший.

Важливим інструментом вибору оптимальних варіантів СКК в каналах із різноманітними параметрами є оцінка ймовірності бітової помилки (BER), яка допомагає обрати спосіб маніпуляції та спосіб кодування для досягнення потрібних показників якості передавання інформації. Для поширених видів маніпуляції, зокрема, для квадратурної амплітудної модуляції (QAM) показник BER традиційно визначається шляхом розрахунку ймовірності помилки за допомогою відомих аналітичних залежностей [1-4].

Попри високу точність аналітичних виразів при високому відношенні сигнал-шум  $h^2$ , їх застосування при низьких значеннях  $h^2$  може призводити до значних відхилень від точних значень BER. У зв'язку з цим постає необхідність порівняльного аналізу актуальних математичних моделей, щоб обрати найбільш достовірну оцінку завадостійкості сигналів із дискретною модуляцією.

У доповіді проведено огляд сучасних методів оцінки BER, визначено їхні переваги та недоліки, а також розглянуто можливі напрямки вдосконалення підходів до математичного моделювання завадостійкості цифрових сигналів.

#### **Постановка задачі дослідження**

Для оцінки завадостійкості широко використовують аналітичні та симуляційні підходи. Аналітичні методи забезпечують високу точність для високої енергетики та швидкість оцінювання характеристик завадостійкості без великих обчислювальних витрат. Симуляційні методи (методи статистичного моделювання), наприклад, векторно-фазовий метод [5], дозволяють отримати

емпіричні результати при різних умовах каналу, однак вони є затратними за часом та обчислювальними ресурсами.

У літературі наведено різні аналітичні співвідношення для визначення ймовірності помилки маніпульованого символу ( $P_{\text{сим}}$ ) та інформаційного біта ( $P_{\text{біт}}$ ) при використанні багатопозиційних сигналів.

Відомо кілька методів розрахунку символних і бітових помилок, серед яких векторно-фазовий метод та підхід, запропонований Дж. Прокісом [1], Л. Фінком [2], К. Чо та Д. Юном [3].

Для сигналів багатопозиційної маніпуляції Дж. Прокісом [1] запропоновані наступні аналітичні вирази:

- Ймовірність бітової помилки для QPSK

$$p_{b \text{ QPSK}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - F \left( \sqrt{2h^2} \cos \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (1)$$

- ймовірність бітової помилки для QAM-M

$$p_{b \text{ QAM}} = \frac{4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{3}{M-1}} h^2}^{\infty} \exp \left( \frac{-u^2}{2} \right) du. \quad (2)$$

В своїй публікації [3] К. Чо і Д. Юн запропонували альтернативні співвідношення:

- Ймовірність бітової помилки для QAM-M

$$p_{b \text{ M-QAM}} \cong \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot h^2}{2(M-1)}} \right) + \frac{\sqrt{M}-2}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left( 3 \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot h^2}{2(M-1)}} \right). \quad (3)$$

В свою чергу, Л. Фінк [2] для m-багатопозиційних сигналів фазової маніпуляції запропонував аналітичні формули:

- Ймовірність бітової помилки для M-PSK

$$p_{b \text{ M-PSK}} < 1 - F \left( \sqrt{2h^2} \sin \frac{\pi}{m} \right), \quad (4)$$

Для отримання точніших результатів необхідно провести розрахунки для аналітичних співвідношення, що дозволяють визначати ймовірності помилок для ширшого спектру видів маніпуляції сигналів.

У доповіді проведено аналіз для таких типів модуляції: QPSK та QAM-16, QAM-64. Аналітичні розрахунки та графічні залежності ймовірності бітових помилок від співвідношення сигнал/шум виконано за відомими формулами.

### **Порівняння результатів дослідження завадостійкості**

Відомо, що завадостійкість сигналів QPSK, QAM-M істотно розрізняється при зміні позиційності  $M$ , тобто кількості біт в одному відліку модульованого сигналу.

Виходячи з виду QAM-M, кожному значенню  $h^2$  можна поставити у відповідність значення  $P_b$ .

За допомогою виразів (1)...(4) проведено аналіз залежностей ймовірності символної помилки від співвідношення сигнал/шум для кожного типу модуляції побудовано за допомогою програмного середовища Matlab і наведено нижче.

На рисунку 1 наведено графіки залежностей завадостійкості сигналів бінарної BPSK та квадратурної QPSK маніпуляції, визначених за співвідношеннями (1), (3), (4). Криві для сигналів BPSK збіглися для всіх співвідношень, для сигналів QPSK найбільш достовірною є формула (4) [2].

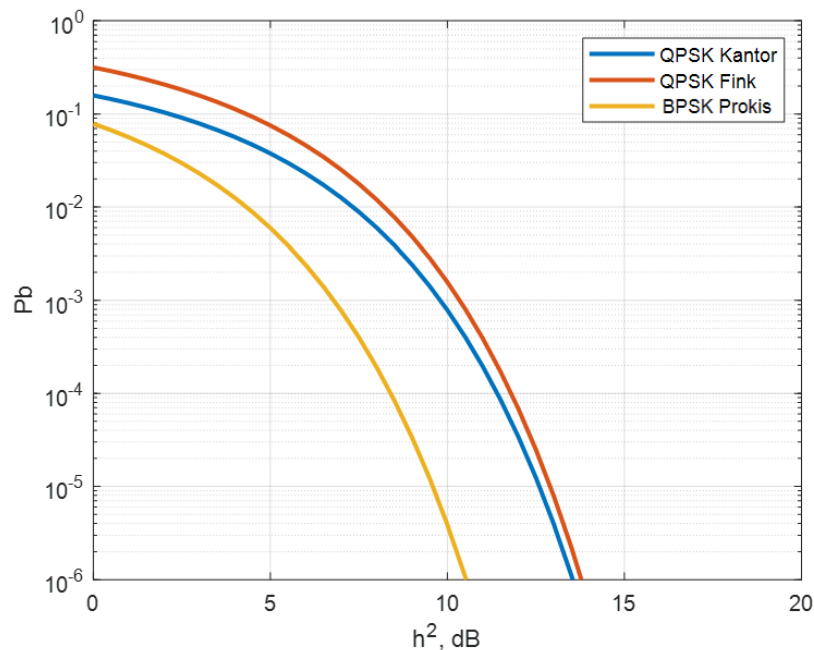


Рис. 1. Графік залежності ймовірності бітових помилок від  $h^2$  для сигналів бінарної BPSK та квадратурної QPSK маніпуляції.

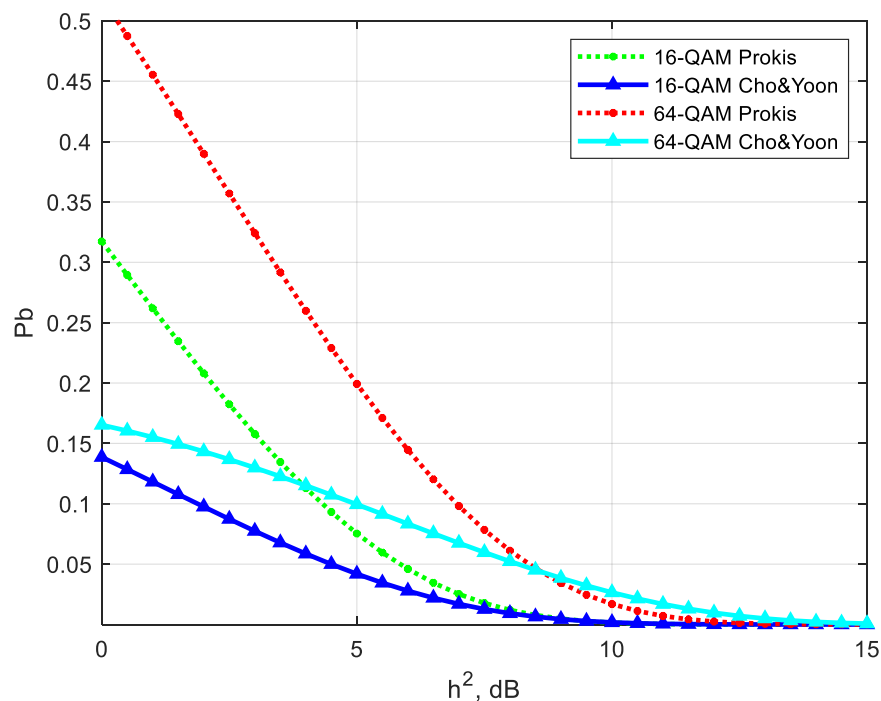


Рис. 2. Графік залежності ймовірності бітових помилок від  $h^2$  для багатопозиційних сигналів 16-QAM та 64-QAM.

Залежності, які наведено на рис. 2 демонструють, що, за умов низької енергетики ( $h^2 < 8-10$  дБ) формули Дж. Прокіса [1], використання яких дуже

поширено в сучасних дослідження завадостійкості каналів з багатопозиційною маніпуляцією, не забезпечують достатньої точності.

При модуляції 16-QAM для  $h^2 > 8$  дБ графічні залежності, отримані за виразами (2) і (3) майже ідентичні. Одночасно, при  $h^2 \approx 0$  ймовірність помилки за методикою Прокіса становить близько 0.32, тоді як у К. Чо і Д. Юн вона близько 0.14.

Для випадку модуляції 64-QAM для  $h^2 > 9$  дБ графічні залежності, отримані за виразами (2) і (3) майже ідентичні, але при менших значеннях  $h^2$  результати суттєво різняться: ймовірність помилки за формулою (2) Дж. Прокіса при  $h^2 \approx 0$  перевищує 0.5 (що не відповідає фізичному змісту цієї помилки), а метод Cho & Yoon надає результат, близький до 0.17.

Отже, модель К. Чо і Д. Юн [3] демонструє кращу точність при малих значеннях  $h^2 < 8-10$  дБ. При високих значеннях  $h^2 > 8-9$  дБ графіки завадостійкості сходяться, що означає, що для високої енергетики різниця між методами менш значуща.

Методика Дж. Прокіса (2) дає перевищену оцінку ймовірності помилки на низьких значеннях  $h^2$ , що означає знижену точність для низької енергетики. Натомість модель К. Чо і Д. Юн (3) є більш точною та стабільною в усьому діапазоні значень  $h^2$ .

### **Порівняння різниці в доповненнях показників завадостійкості результатами завадостійкого кодування (для досягнення потрібної достовірності) і змінах інформаційної ефективності**

Оцінка завадостійкості прийнятого сигналу через показник BER є першим етапом обробки СКК. Наступним етапом є вибір способу кодування, який забезпечить прийом сигналу із заданою якістю. Сукупність способів обробки сигналу на першому і другому етапі визначають підсумкову ефективність використання наданих ресурсів (частоти і енергетики) каналу зв'язку. Фінальним показником є інформаційна ефективність каналу при наданих йому ресурсах. Для оцінки енергетичної, частотної та інформаційної ефективності використана відома методика [5, 6].

На прикладі сигналів з модуляцією QPSK (Рис. 3) показано, як варіюються вказані показники ефективності для досягнення необхідної бітової достовірності помилки  $10^{-7}$ .

При вихідній бітовій ймовірності  $10^{-3}$  в каналі (точка 1), можна використовувати завадостійкий блоковий код (127,99,4) для досягнення  $P_b = 10^{-7}$  (точка 4), а при вихідній бітовій ймовірності  $10^{-5}$  в каналі (точка 2), можна використовувати завадостійкий блоковий код (127,113,2) для досягнення  $P_b = 10^{-7}$  (точка 5).

Як можна помітити з рис. 3, застосування ступені завадостійкого кодування завжди призводить до зниження частотної ефективності  $\gamma$ . Чим більше швидкість коду, тим меншу частотну ефективність воно забезпечує. Водночас, слід зауважити, що при застосуванні завадостійкого кодування енергетична ефективність  $\beta$  покращується.

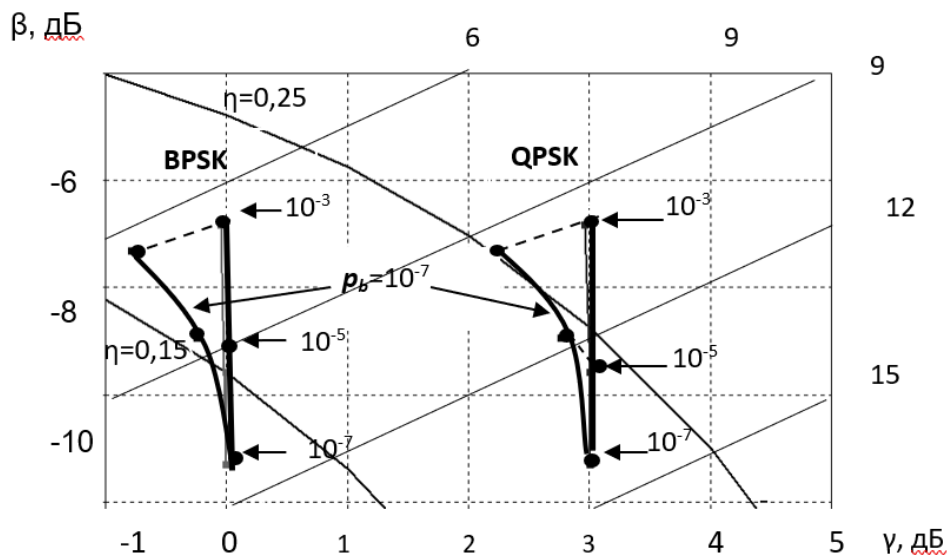


Рис. 3. Показники ефективності використання ресурсів при  $P_b = 10^{-7}$ .

Модифікована шкала ефективності дозволяє комплексно оцінити частотну  $\gamma$ , енергетичну  $\beta$  та інформаційну ефективності  $\eta$  використання багатопозиційної маніпуляції та завадостійкого кодування.

Такий спосіб оцінки розширює спектр пошуку оптимальних за відносним критерієм енергетичної і частотної ефективності систем передачі, а також абсолютним енергетичним показником  $h^2$ , оскільки забезпечує великі можливості варіювання параметрами для досягнення максимальної продуктивності при мінімальних витратах ресурсів каналу зв'язку.

При цьому важливо виходити із достовірної оцінки якості прийому сигналів до кодування, щоб інструменти завадостійкого кодуванні чітко відповідали вимогам якості, оскільки надлишок ресурсів веде до зниження інформаційної ефективності, або нестача потужності коду не забезпечує вимоги до достовірності прийому сигналів.

### Висновки

1. У доповіді продемонстровано важливість використання сигнально-кодових конструкцій для підвищення ефективності цифрових систем зв'язку. Зокрема, розглянуто аналітичні підходи до оцінювання ймовірності бітової помилки для сигналів QPSK та QAM-M за формулами (1)...(4).

2. Порівняння результатів різних методів оцінки бітової помилки (Дж. Прокіс, К. Чо&Д. Юн, Л.Фінк) свідчить про переваги та обмеження кожного з підходів. Методи статистичного моделювання, такі як векторно-фазовий, дають змогу здобути більш універсальні результати за умов різних параметрів каналу, проте вимагають великих обчислювальних затрат. Аналітичні вирази є швидшими у реалізації і надійними для високих співвідношень сигнал/шум, але потребують корекції або розширення у разі низької енергетики чи нестандартних умов передачі. Усі ці методи доцільно враховувати при проектуванні та оптимізації цифрових систем, особливо, коли на перший план виходять вимоги до точності, швидкодії та ресурсоемності розрахунків.

3. Показано, що традиційні формули (4), (1) для сигналів BPSK і QPSK дозволяють точно оцінити ймовірність бітової помилки у випадку як за низького рівня енергії сигналу, так і для відносно високих співвідношень сигнал/шум, тоді можуть виникати помітні відхилення від емпіричних та більш точних аналітичних оцінок.

4. Для сигналів QAM-M формули (2), (3) дозволяють точно оцінити ймовірність бітової помилки у випадку відносно високих співвідношень сигнал/шум ( $h_2 > 10$  дБ), тоді як за низького рівня енергії ( $h_2 > 8$  дБ) можуть виникати помітні відхилення від емпіричних та більш точних аналітичних оцінок. За умов низької енергетики ( $h_2 < 8-10$  дБ) формули Дж. Прокіса [1], використання яких дуже поширено в сучасних дослідженнях завадостійкості каналів з багатопозиційною маніпуляцією, не забезпечують достатньої точності. Для оцінки завадостійкості сигналі QAM-M більш достовірною слід вважати методику К. Чо і Д. Юн [3].

5. Аналіз отриманих результатів демонструє, що застосування завадостійкого кодування впливає на частотну та енергетичну ефективність системи. Підвищення надійності шляхом кодування збільшує енергетичний виграш і знижує ймовірність помилки, але одночасно зменшує частотну ефективність. Отже, при виборі оптимальних параметрів модуляції та кодування доцільно враховувати як вимоги до якості зв'язку (BER, енергетична ефективність), так і обмеження щодо пропускної здатності каналу. Універсальний підхід, що поєднує аналітичне моделювання, емпіричні розрахунки й адаптивне налаштування системи, дозволить максимально ефективно використовувати ресурси сучасних цифрових систем передачі.

### Література

1. Proakis, John G. Digital Communications. 4th ed. – New York: McGraw Hill, 2001.
2. Fink L. M. Discrete message transmission theory. – 1970. – 728 p.
3. Cho, K., and D. Yoon. "On the general BER expression of one- and two-dimensional amplitude modulations," IEEE Transactions on Communications, vol. 50, no. 7 (July 2002): 1074-1080. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2002.800818>.
4. Шмігель Б.О., & Уривський Л.О. (2021). ВИЗНАЧЕННЯ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ СКК В УМОВАХ НИЗЬКОЇ ЕНЕРГЕТИКИ. Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції «ПЕРСПЕКТИВИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ», с. 53–55. <https://conferenc-journal.its.kpi.ua/article/view/230207>
5. Уривський Л. О., Прокопенко К. А., Наталенко А. І. Векторно-фазовий метод для визначення показників завадостійкості багатопозиційних сигналів. – Зв'язок, № 12, 2012. – с. 58...63.
6. Uryvsky L., Moshynska A., Osypchuk S., Shmihel B. Comparison of methods for determining noise immunity indicators of a multiservice transmission system. / Advances in Information and Communication Technologies. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 560. / monograph. – Springer, Cham, p.p. 167...185. (2019). [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-16770-7\\_8](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-16770-7_8)