

**ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ОЦІНЮВАННЯ
ПАРАМЕТРІВ РУХУ НЕВЕЛИКИХ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ
АПАРАТІВ ЗА РАХУНОК ВРАХУВАННЯ ВІТРУ НА ОСНОВІ
ВИКОРИСТАННЯ ДРОБНИХ РЯДІВ ТЕЙЛОРУ**

Цуканов О.Ф., Якорнов Є.А.

Навчально-науковий інститут телекомунікаційних систем

КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

E-mail: cukanov-o@ukr.net

**IMPROVING THE ACCURACY OF ASSESSING
THE MOTION PARAMETERS OF SMALL UNMANNED
AIRCRAFT AT THE ACCOUNT OF WIND ACCOUNTING
BASED ON THE USE OF FRACTIONAL TAYLOR SERIES**

The possibility of using fractional Taylor series to estimate the movement parameters of small unmanned aerial vehicles, which are subject to strong wind effects, is considered. Some simulation results are presented, showing an increase in estimation accuracy of up to 20% compared to known methods.

Розглянуто можливість застосування дробових рядів Тейлору для оцінки параметрів руху невеликих безпілотних літальних апаратів, які схильні до сильного впливу вітру. Наведено деякі результати моделювання, що показують збільшення точності оцінювання до 20% порівняно з відомими методами.

В роботі [1] проведено аналіз досвіту застосування безпілотних літальних апаратів (БПЛА) країн членів НАТО та США, на основі якого визначений основний напрямок їх подальшого розвитку застосування при веденні мережецентричних операцій, як одних з елементів повітряної компоненти систем розвідки, зв'язку, навігації та ударних систем. Одним із завдань при створенні повітряної компоненти систем розвідки є визначення параметрів руху (ПР) невеликих БПЛА з високою точністю за наявності дестабілізуючих факторів, таких як вітер (ударна хвиля при веденні бойових дій), зміна атмосферного тиску залежно від висоти польоту та інших. Тому для таких БПЛА траєкторію їхнього польоту слід розглядати як траєкторію об'єкта зі складним видом маневру і що складається з безлічі ділянок, кожна з яких необхідно описувати своєю системою диференціальних рівнянь, тобто характер його переміщення в просторі є траєкторією, на якій можна виділити ділянки з рівномірним рухом, різким маневром та ділянки з безперервним маневруванням об'єкта. Тому, для оцінки ПР БПЛА, який постійно маневрує, доцільно застосовувати адаптивний підхід з урахуванням рекурентного фільтра Калмана. Основним недоліком останнього є той факт, що у разі постійного короткочасного маневру фільтр Калмана завжди працюватиме на перехідній ділянці, а відомо, що максимальна точність оцінювання досягається саме на стаціонарній ділянці. Це означає, що алгоритми з

перехідною ділянкою, як правило, рекурентні, не застосовні для оцінювання ПР постійно маневруючого БПЛА.

Розглянемо наступне завдання: не збільшуючи ступеня апроксимуючого полінома забезпечити підвищення точності оцінювання ПР БПЛА, що постійно маневрує. Для цього розглянемо потенціальні можливості ряду П'юїзе [2] з однією змінною. Це формальний вираз виду

$$F(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{\frac{n}{m}}, \quad (1)$$

в якому число n_0 - ціле, число m - натуральне число, коефіцієнти a_n беруться з деякого кільця, причому коли $n < m$, коефіцієнти a_n повинні бути комплексними.

Ряд (1) у разі коли змінна x набуває речового значення, а значення $n_0 = 0$ може бути представлений у вигляді суми двох рядів

$$F(x) = T(x) + R(x), \quad (2)$$

де $T(x)$ – ряд Тейлора, а $R(x)$ – ряд, що складається з дробових членів. Назвемо ряд (2) дробовим рядом Тейлора. Відомий ряд Тейлора [3] у цілих похідних має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (3)$$

або у загальному вигляді $f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_0)^k \frac{(x-x_0)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Уявимо ряд Тейлора (3) для дробових похідних [2]. Для цього загальновідомий запис першого похідного для функцій $f(x) = x^k$, представимо як

$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = k x^{k-1}$, або узагальнено $\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$, а після заміни факторіалів гамма-функціями можна останній вираз подати у вигляді

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}. \quad (4)$$

Далі без суворого математичного обґрунтування введемо припущення: якщо існує ряд Тейлора для похідних, то такий ряд може існувати і з дробовими похідними для $n_0 = 0$, і речовими коефіцієнтами.

Тоді з урахуванням існування [2] дробових похідних такий ряд має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_0)^k \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} (x-x_0)^{k-n}, \quad (5)$$

де $k=0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, \dots$

Назвемо додаткові члени введеного ряду дробовими. Зауважимо, що при використанні ряду Тейлора (5) не можна стверджувати, що він є схожим як ряд (1). Причиною цього є відсутність ортогональності членів одержаного ряду. Також зауважимо, що автори не претендують на математичну строгість використання ряду (4). Наше завдання: з'ясувати шляхом моделювання, що використання ряду Тейлора (4) при оцінюванні ПР БПЛА, яке маневрує, методом найменших квадратів (МНК) призведе лі до підвищення точності оцінювання порівняно з використанням ряду (1). Надія на цей виграш обумовлена тим, що використання ряду (4) дозволяє збільшити дискретність оцінки похідних складових траєкторії руху БПЛА.

Для початку порівняємо дробовий ряд Тейлора зі звичайним його поряд. Обмежимося також використанням ряду (5) для похідних не вище $3/2$ і залишимо поки що осторонь фізичний зміст коефіцієнтів при дробових похідних да спробуємо пояснити з математичної точки зору сутність дробової похідної.

Виходячи з вищевикладеного, проаналізуємо застосування введеного ряду Тейлора (4) з дробовими похідними стосовно задачі оцінювання ПР БПЛА. На рис. 1 показані результати апроксимації полінома третього ступеня з розподіленим шумом за нормальним законом з дисперсією помилки рівною 5 м^2 - штрих пунктирна лінія, на всьому інтервалі за МНК поліномами ступеня $\frac{1}{2}$ та 2 ступеня - суцільна лінія, і за МНК поліномом ступеня $\frac{3}{2}$ через дробові ступеня $\frac{1}{2}$ - пунктирна лінія. З графіків видно, що помилка оцінювання при оцінюванні МНК поліномом (5) зменшується на 10-15%.

Аналогічно на рис 2. показаний результати апроксимації полінома третього ступеня з шумом розподіленим за нормальним законом з дисперсією помилки, що дорівнює 5 м^2 , - штрих пунктирна лінія, за методом МНК поліномом (4) - суцільна лінія, і дробовим поліномом $Y = a_0 + a_1 x^{0.5} + a_2 x^1$ - пунктирна лінія. Бачимо, що і в даному випадку застосування полінома з дрібним ступенем дозволяє підвищити точність оцінювання до 20%.

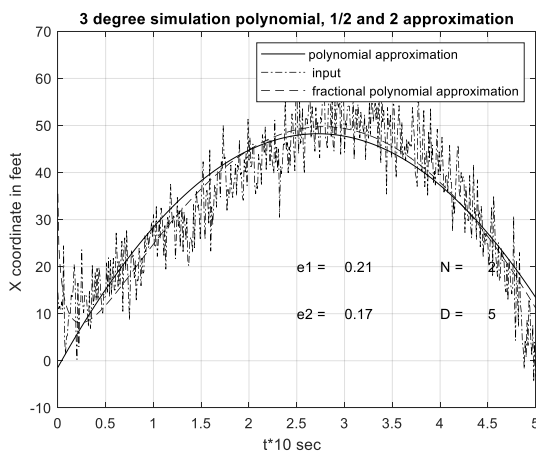


Рис. 1.

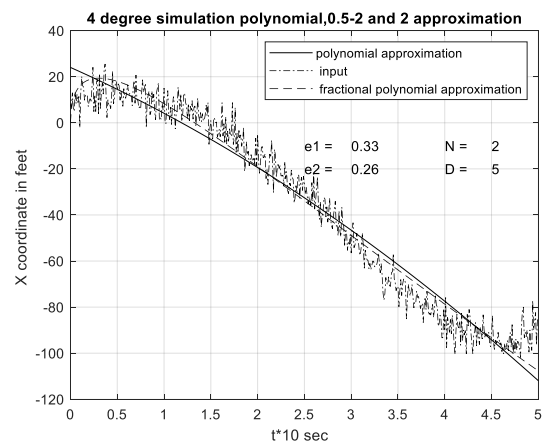


Рис. 2.

З результатів моделювання слід, що для БПЛА, яке постійно маневрує, найбільш прийнятним поліномом оцінювання є МНК з дрібними ступенями $\frac{1}{2}$ і, на наш погляд, необхідне подальше дослідження поліномів з дрібними ступенями вище ступеня $\frac{3}{2}$.

Література

1. Кучеренко Ю.Ф., Науменко М.В., Кузнецова М.Ю. Аналіз досвіду застосування безпілотних літальних апаратів та визначення напрямку їх подальшого розвитку при веденні мережецентричних операцій. Системи озброєння і військова техніка, 2018, № 1(53), с. 25-30.
2. Kilbas A., Srivastava H. and Trujillo J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
3. Sierociuk D. Fractional Kalman Filter algorithm for states, parameters and order of fractional system estimation, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2006, Vol.16, No.1, pp, 129-140.