УДК 519.8

МОДЕЛЬНІ ІГРОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ КАПУТТО І РІМАНА-ЛІУВІЛЯ

Руренко О.Г.
Інститут телекомунікаційних систем КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна
E-mail: a.rurenko@gmail.com

THE FRACTIONAL GAME PROBLEM FOR THE LINEAR SYSTEMS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES IN SENSE OF RIEMANN-LIOUVILLE AND CAPUTO

The fractional game problem is obtained from the classical equation for linear relaxations and oscillations by replacing the first-order derivative and the second-order time derivative by fractional derivative of order α with $0 < \alpha < 2$. It is shown that that presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in sense of Riemann-Liouville and Caputo can be expressed in terms of the matrix Mittag-Leffler functions.

В роботі вивчаються модельні ігрові задачі в конфліктних умовах для систем рівнянь з фрактальними похідними Капутто і Рімана-Ліувіля. Отримано в явному вигляді розв'язки таких систем рівнянь для дробових похідних Капуттно і Рімана-Ліувілля порядка 0 < alpha < 2.

В n - вимірному евклідовому просторі R^n розглядається процес $z(t)$, $z(t) \in R^n$ у вигляді моделі динамічної гри з двома гравцями, які протидіють один одному через свої керування $u \in U$, $v \in V$, деяка функція $\varphi(u,v)$, $\varphi : U \times V \to R^n$ описує блок керування, а еволюція гри задана системою диференціальних рівнянь дробового порядку $\alpha, m - 1 < \alpha \leq m$

$$D^{\alpha}\left(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} z^{(k)}(0+)\right) = Az(t) + \varphi(u,v) \tag{1}$$

з початковими умовами:

$$z^{(k)}(0+) = c_k, k = 0, 1, 2, \cdots, m - 1 \tag{2}$$

де A - квадратна матриця порядку n.

Окрім еволюції процесу в просторі R^n задана деяка множина M^*, яку в задачах переслідування-зустрічі називають термінальною. З геометричних представлень динаміки зближення двох конфліктно-керованих процесів в R^n множина M^* вибрана у вигляді:

$$M^* = M_0 + M, \tag{3}$$

де M_0 -лінійний підпростір, а M -деякий компакт із ортогонального доповнення L до M_0 в R^n.

Перший гравець вибирає керування $u(t) \in U$ і має за мету вивести траєкторію процесу $z(t)$ на термінальну множину M^* за мінімальний час, а другий - керування $v(t) \in V$ вибирає таким чином, щоб не допустити "зустрічі" з термінальною множиною, або максимально "відкласти зустріч".

Для цілого m, і дробового α, $m-1 < \alpha \leq m$ визначені дробовий інтеграл Рімана - Ліувіля порядку β [1] від функції $z(t)$, $t \geq 0$:

$$J^\beta z(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} z(\tau) d\tau, \ t > 0,$$

де $\Gamma(\beta)$ − гамма-функція Ейлера, похідна $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$ і дробова похідна Рімана-Ліувіля

$$D^\alpha z(t) := D^m \ J^{m-\alpha} z(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} z(\tau) d\tau \ .$$

В роботах [2], [3], [4] вивчалися ігрові задачі для систем лінійних рівнянь з дробовими похідними Рімана - Ліувіля і Капутто для $0 < \alpha < 1$ і отримано явні формули для представлення еволюції гри (1), (2) у вигляді:

$$z(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha) c_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau.$$

Тут $E_{\alpha,\beta}(A)$ - спеціальна матрична функція Міттаг - Леффлера від A

$$E_{\alpha,\beta}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta \in C,$$

де A - довільна квадратна матриця порядку n з комплекснозначними елементами.

Дана робота є логічним продовженням результатів, які викладені у [2], [3], [4] на більш загальний випадок значень α коли $0 < \alpha \leq 1$ і $1 < \alpha \leq 2$.

Для дослідження ігрових задач з дробовими похідними типу (1), (2), (3) використовується розроблений і добре відомий в теорії диференціальних ігор та розширений для більш широких класів ігрових задач апарат розв'язувальних функцій, який для даного класу ігор системно викладений в роботі [3].

Суть методу полягає в побудові спеціальної числової функції $\alpha(t, \tau, v)$, яка є інтегральною кількісною мірою ступені зближення траєкторії $z(t)$ з термінальною множиною M^* і дозволяє в окремих випадках визначити достатні умови зближення траєкторії $z(t)$ з термінальною множиною M^*.

Література

1. A. Kilbas, H. Srivastava and J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. S. Eidelman, A. Chikrii, A. Rurenko, Game Problems for Fractional Systems //Доп. НАН України. –1999. –№1. –С.92-96.
3. A. Chikrii and S. Eidelman "Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order Cybern. Syst. Analysis, vol. 36, no. 3, pp. 315-338, 2000.
4. A. Chikrii and I. Matichin, "Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville, Caputo and Miller-Ross J. Autom. Inf. Sci., vol. 40, no. 6, pp. 1-11, 2008.