

АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ КАНАЛАХ С КОДИРОВАНИЕМ

Урывский Л.А., Вергун С. Н.
(ORCID: 0000-0002-4073-9681)

*Институт телекоммуникационных систем НТУУ «КПИ», Украина
E-mail: leonid_uic@ukr.net, svitlanavergun92@gmail.com*

Approximation of discrete channel with coding efficiency extrema

It was produced investigation of the transmission systems extrema performance for binary signals based on correlation analysis of the symbol rate in the channel and the probability of error performance and throughput in a discrete channel using redundant coding. The values of the maximum transmission channel performance under certain energy characteristics and the length of the error-correcting block code are defined.

Стремительное развитие систем передачи информации требует увеличения скорости безошибочной передачи. Согласно теореме Шеннона, существует способ кодирования и декодирования, при котором возможно осуществить передачу сообщений по каналу с помехами со сколь угодно малой вероятностью ошибки. Однако, теорема не определяет параметры помехоустойчивого кода и условий его получения.

Влияние помехоустойчивого кодирования на производительность источника дискретных сигналов, можно оценить с помощью [1]:

$$R = V_s \cdot r_k \left[1 + p_{\text{ош}} \log p_{\text{ош}} + (1 - p_{\text{ош}}) \log(1 - p_{\text{ош}}) \right], \quad (1)$$

где V_s – скорость формирования источником информационных символов;

$r_k = \frac{k}{n}$ – скорость кодирования, которая определяется как отношение количества информационных символов (k) к общему числу символов блока (n);
 $p_{\text{ош}}$ – вероятность битовой ошибки при приеме символов источника.

Для канала связи с помехами, использующего M -позиционные сигналы, пропускная способность определяется следующим образом [1]:

$$C = V_c \left[\log M + p_{\text{ош}} \log \frac{p_{\text{ош}}}{M-1} + (1 - p_{\text{ош}}) \log(1 - p_{\text{ош}}) \right], \quad (2)$$

где $p_{\text{ош}}$ – вероятность ошибочного приёма символов из канала связи;

V_c - скорость передачи символов в канале связи.

В случае когерентного способа обработки сигналов бинарной фазовой манипуляции ФМ-2 ($M=2$) вероятность ошибки приема манипулированных сигналов может быть рассчитана по формуле [3]:

$$P_{\text{ошФМ-2КГ}} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2 \frac{\alpha}{V_c}} \right) \right], \quad (3)$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности или функция Крампа;

$\alpha = \frac{P_c}{N_0}$ – энергетический параметр, определяемый отношением мощности сигнала в точке приема P_c и односторонней спектральной плотности мощности помехи N_0 .

В случае некогерентного способа обработки сигналов ФМ-2 [3]:

$$P_{\text{ошФМ-2НКГ}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha}{V_c}}. \quad (4)$$

Вероятность ошибки символа многопозиционного сигнала на выходе демодулятора при ФМ-4 ($M=4$) определяется по формуле:

$$P_{\text{ФМ-4ош}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{V_c}}\right) - \frac{1}{4} \Phi^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{V_c}}\right), \quad (5)$$

а вероятность ошибки бинарного символа для этого случая составляет:

$$P_{\text{ФМ-4бш}} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2\frac{\alpha}{V_c}} \cos \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (6)$$

Из зависимостей (3) – (6), видно, что увеличение скорости передачи V_c приводит к увеличению вероятности битовой ошибки $p_{\text{бш}}$. В этом случае, для обеспечения требуемой достоверности при неизменных энергетических ресурсах канала α , необходимо применить помехоустойчивое кодирование.

Постоянное повышение скорости передачи приводит к необходимости использования кодов с большей исправляющей способностью S и, соответственно, меньшей скоростью кодирования r_k . Противоположность указанных тенденций изменения производительности в (1) порождает экстремумы (максимумы) показателя R .

Задача нахождения экстремума производительности сводится к поиску максимума следующего функционала [2]:

$$\max_{V_c \rightarrow \infty} R | n, p_{\text{бш}}, \alpha = \text{const}. \quad (7)$$

Функционал (7) означает, что необходимо найти максимум производительности при постоянных длине блока n , требуемой достоверности $p_{\text{бр}}$, заданном энергетическом параметре α в условиях увеличивающейся скорости передачи V_c .

Экстремумы производительности для различных наборов исходных параметров определяются на основе итерационного метода при пошаговом наращивании значения скорости V_c .

На рис.1 изображены графики пропускной способности и производительности, которые отображают изменение производительности бинарных сигналов фазовой манипуляции при когерентной и некогерентной обработке и сигналов ФМ-4 при увеличении скорости в случае $\alpha=32 \text{ с}^{-1}$. При этом требования к вероятности ошибки приёма информации в системе неизменны: $p_{\text{бш}}=10^{-6}$.

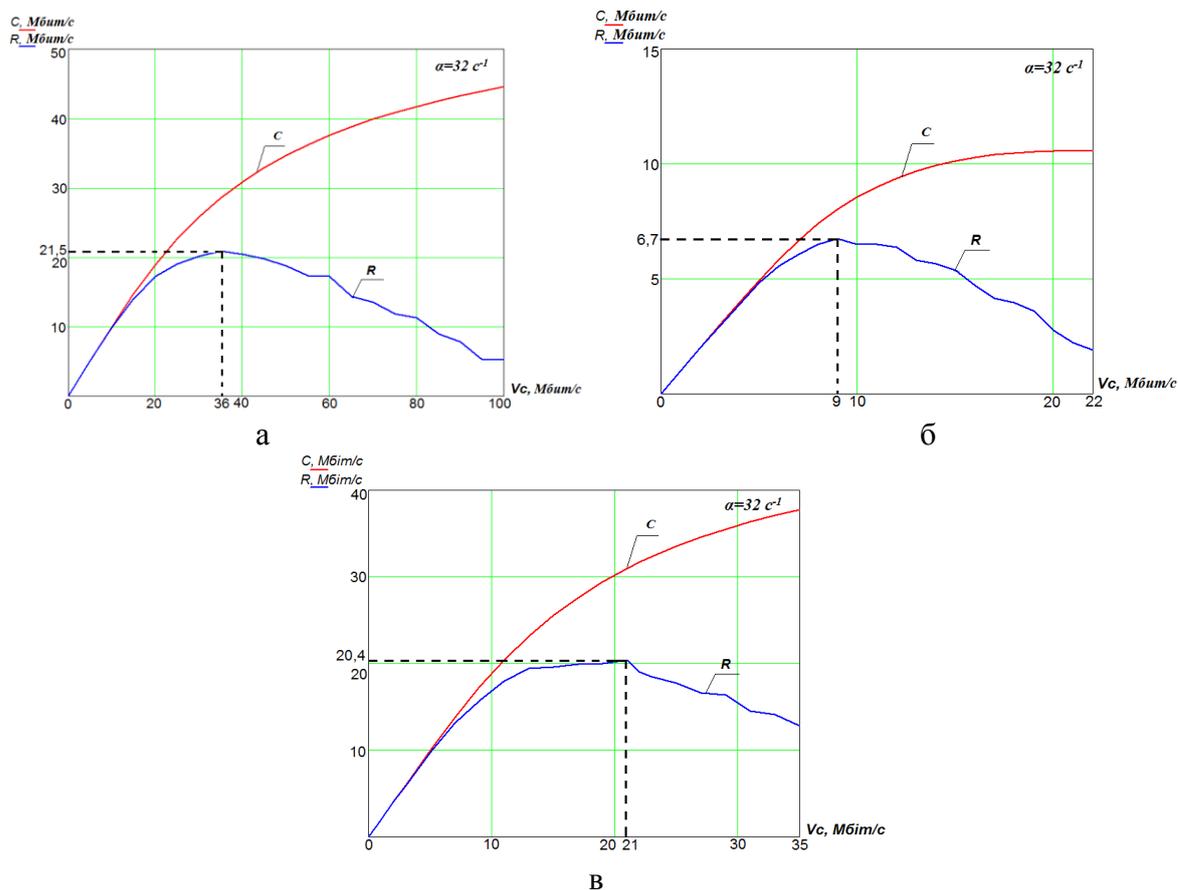


Рис.1. Графики пропускной способности и производительности при $\alpha=32 \text{ c}^{-1}$, $n=100$ для: а) ФМ-2, КГ; б) ФМ-2, НКГ; в) ФМ-4

При увеличении длины блока кода характер зависимости производительности от скорости передачи символов сохраняется. В табл. 1 сведены результаты исследования для случая, когда $n=100$, 200 и 1000 символов, сигналов ФМ-2 при когерентном способе обработки сигналов [2].

Таблица 1. Параметры дискретного канала при ФМ-2 и $\alpha=32 \text{ c}^{-1}$

n	V_c , Мбит/с	C , Мбит/с	R , Мбит/с	$\rho_{\text{ош}}$	$\rho_{\text{бит}} \cdot 10^{-7}$	S	k
100	36	29,06	21,5	0,03	9,3	8	74
200	40	30,9	22,24	0,037	9,174	15	144
1000	45	32,92	24,69	0,046	8,9	64	750

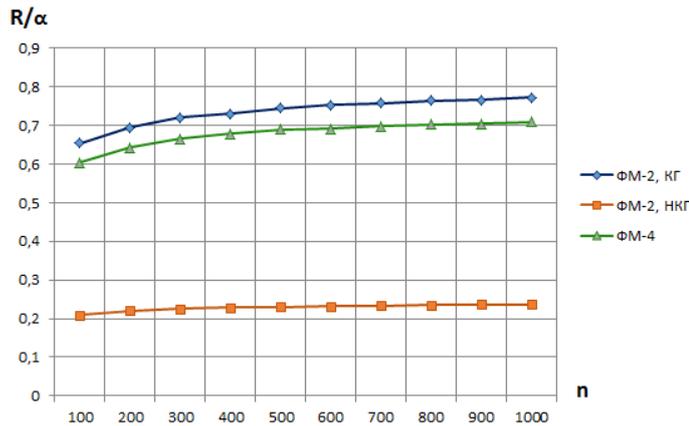
При увеличении скорости передачи символов V_c увеличивается пропускная способность C и производительность R . С ростом V_c различие между этими величинами увеличивается. После точки максимума пропускная способность C продолжает возрастать, а производительность R набирает тенденцию к снижению, что происходит в следствии необходимых затрат на помехоустойчивое кодирование для обеспечения качества передачи информации не менее 10^{-6} .

Исходя из анализа полученных результатов, прослеживается пропорциональная зависимость значения экстремума производительности R и энергетического параметра α для сигналов ФМ-2 и ФМ-4. Аналитические зависимости этих величин для рассмотренных случаев сведены в табл. 2.

Таблица 2. Зависимость значения экстремума R и параметра α

	ФМ-2, КГ	ФМ-2, НКГ	ФМ-4
$n=100$	$R = 0,66 \alpha$	$R = 0,21 \alpha$	$R = 0,6 \alpha$
$n=500$	$R = 0,74 \alpha$	$R = 0,23 \alpha$	$R = 0,69 \alpha$
$n=1000$	$R = 0,77 \alpha$	$R = 0,24 \alpha$	$R = 0,71 \alpha$

Графическая зависимость производительности R и значения параметра α , при котором достигается максимум R , от длины блока кода n для когерентного и некогерентного способов обработки бинарных сигналов и для сигналов ФМ-4 имеет вид, отображенный на рис. 2.

Рис. 2. Зависимость производительности R и параметра α от длины блока кода

При проведении полиномиальной аппроксимации построенных кривых были получены их уравнения. Для бинарных сигналов когерентной обработки уравнение имеет вид:

$$\frac{R}{\alpha} = -4 \cdot 10^{-13} n^4 + 10^{-9} n^3 - 10^{-6} n^2 + 0,0007n + 0,5952, \quad (8)$$

а при некогерентной обработке:

$$\frac{R}{\alpha} = 3 \cdot 10^{-6} n^5 - 9 \cdot 10^{-5} n^4 + 0,0013n^3 - 0,0083n^2 + 0,0289n + 0,1865. \quad (9)$$

Для сигналов ФМ-4:

$$\frac{R}{\alpha} = -4 \cdot 10^{-5} n^4 + 0,0012n^3 - 0,0133n^2 + 0,0695n + 0,5471. \quad (10)$$

Таким образом, при известных энергетических характеристиках, а именно: отношении мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума α , и длине блока помехоустойчивого кода n , можно определить значение максимальной производительности источника дискретных сообщений. Можно утверждать, что использование ресурсов канала является самым рациональным именно при этом значении, так как дальнейшее увеличение скорости передачи приводит к снижению производительности.

Литература

1. Уривський Л.О. Визначення границь коригуючих властивостей блокових кодів [Текст] / Уривський Л.О., Прокопенко К.А. // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" "Радіоелектроніка та телекомунікації" – 2011 - № 705 - С.90-97.
2. Урывский Л. А., Прокопенко Е. А., Вергун С. Н. Исследование экстремумов производительности в дискретных каналах связи с кодированием // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2014. №.5(33) – с. 20-26.
3. Основи теорії телекомунікацій: підручник / О. В. Корнейко, О. В. Кувшинов, О. П. Лежнюк [та ін.]; за заг. ред. М. Ю. Ільченка. – К.: Вид-во ІССЗІ НТУУ «КПІ», 2010. – 786 с.: іл.